ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRỊNH THỊ THANH BÌNH

VỀ BẤT ĐẲNG THỨC SIMPSON VÀ VẬN DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRỊNH THỊ THANH BÌNH

VỀ BẤT ĐẲNG THỨC SIMPSON VÀ VẬN DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

HD1: TS. Trần Xuân Quý

HD2: TS. Đỗ Thị Phương Quỳnh

THÁI NGUYÊN - 2020

Mục lục

Mở đầu **2**

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị **4**

1.1 Hàm số, biến phân và biến phân toàn phần 4

1.2 Một số bất đẳng thức liên quan 6

1.2.1 Bất đẳng thức Hölder 6

1.2.2 Bất đẳng thức Grüss 6

1.2.3 Bất đẳng thức Ostrowski 10

Chương 2. Bất đẳng thức Simpson và một số ứng dụng **12**

2.1 Bất đẳng thức Simpson đối với các ánh xạ có biến phân bị chặn 14

2.2 Bất đẳng thức Simpson đối với ánh xạ Lipschitz 19

2.3 Bất đẳng thức Simpson với các số hạng khả tích cấp p 22

2.4 Bất đẳng thức Grüss, Ostrowski đối với công thức Simpson 26

2.4.1 Bất đẳng thức Grüss 26

2.4.2 Bất đẳng thức Ostrowski 32

Kết luận **41**

Tài liệu tham khảo **42**

Mở đầu

Trong kỷ nguyên công nghệ thông tin, sự biến đổi các ngành trong các lĩnh vực khoa học tự nhiên hay khoa học xã hội luôn diễn ra với tốc độ chóng mặt. Nhờ internet và các phương tiện truyền thông mà các quốc gia đã xích lại gần nhau trong một thế giới hội nhập toàn cầu hoá. Ở một phạm vi hẹp chúng ta có thể thấy sự phát triển của các trang web Toán học đã làm cho những người đam mê Toán học trên thế giới có thể dễ dàng nhanh chóng tiếp cận và trao đổi thông tin vô cùng phong phú.

Bất đẳng thức là một vấn đề khá cổ điển của Toán học sơ cấp đang ngày càng phát triển, đây cũng là một trong những phần toán sơ cấp đẹp và thú vị nhất, vì thế luôn cuốn hút rất nhiều đối tượng bạn đọc quan tâm. Mọi người dễ thống nhất với nhau là bất đẳng thức luôn chiếm vị trí quan trọng đối với toán học phổ thông cũng như trên các trang web Toán học.

Bất đẳng thức có vị trí đặc biệt trong toán học không chỉ như là đối tượng để nghiên cứu mà còn đóng vai trò như là một công cụ đắc lực của các mô hình toán học liên tục cũng như các mô hình toán học rời rạc trong lý thuyết phương trình, lý thuyết xấp xỉ, lý thuyết biểu diễn,... Điểm đặc biệt, ấn tượng nhất của bất đẳng thức trong toán sơ cấp, đó là có rất nhiều những bài toán khó, thậm chí là rất khó, luôn có thể giải được bằng những kiến thức rất cơ sở và việc hoàn thành được chứng minh là niềm vui thực sự.

Trong hầu hết các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, thi Olympic Toán khu vực và quốc tế, thi Olympic Toán sinh viên giữa các trường đại học và cao đẳng, các bài toán liên quan đến bất đẳng thức cũng hay được đề cập và thường thuộc loại khó hoặc rất khó. Các bài toán về ước lượng và tính giá trị cực trị (cực đại, cực tiểu) của các tổng, tích cũng như các bài toán xác định giới hạn của một số biểu thức cho trước thường có mối quan hệ ít nhiều đến các tính toán, ước lượng (bất đẳng thức) tương ứng.

Lý thuyết bất đẳng thức và đặc biệt, các bài tập về bất đẳng thức rất phong phú và cực kỳ đa dạng. Có nhiều ý tưởng cơ bản, cách thức tiếp cận và một số hướng ứng dụng theo các dạng toán cũng như phương pháp giải điển hình. Với đề tài " Về bất đẳng thức Simpson và vận dụng", trong tập luận văn này tác giả xin tóm tắt các kiến thức cơ bản về bất đẳng thức Simpson, từ đó đi sâu nghiên cứu một số bài tập liên quan đến bất đẳng

thức Simpson.

Luận văn này gồm phần Mở đầu, Nội dung và được chia làm hai chương đề cập các vấn đề sau đây:

Chương 1: Trình bày về " Một số kiến thức chuẩn bị". Trong chương này tác giả trình bày sơ lược về hàm số, biến phân và biến phân toàn phần, một số bất đẳng thức liên quan như: bất đẳng thức Hölder, bất đẳng thức Grüss, bất đẳng thức Ostrowski.

Chương 2: Trình bày về " Bất đẳng thức Simpson và một số ứng dụng ". Trong chương này tác giả giới thiệu bất đẳng thức Simpson. Trình bày bất đẳng thức Simpson đối với các ánh xạ có biến phân bị chặn, bất đẳng thức Simpson đối với đối với ánh xạ Lipschitz, bất đẳng thức Simpson với các số hạng khả tích cấp p, bất đẳng thức Grüss, Ostrowski đối với công thức Simpson.

Trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, em luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ và động viên của các thầy cô trong Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo, Khoa Toán -Tin. Với bản luận văn này, em mong muốn được góp một phần nhỏ công sức của mình vào việc gìn giữ và phát huy vẻ đẹp, sự hấp dẫn cho những bất đẳng thức toán học vốn dĩ đã rất đẹp. Đây cũng là một cơ hội cho em gửi lời tri ân tới tập thể các thầy cô giảng viên của trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên nói chung và Khoa Toán - Tin nói riêng, đã truyền thụ cho em nhiều kiến thức khoa học quý báu trong thời gian em được là học viên của trường. Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu trường THPT Đồng Hòa - Kiến An - Hải Phòng cùng toàn thể các anh chị em đồng nghiệp đã tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả trong thời gian đi học Cao học; chân thành cảm ơn các anh chị em học viên lớp Cao học Toán K12A7 và bạn bè đồng nghiệp đã trao đổi, động viên và khích lệ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên. Đặc biệt em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo giảng dạy của em đồng thời cũng là giáo viên hướng dẫn - TS. Trần Xuân Quý và TS. Đỗ Thị Phương Quỳnh đã luôn quan tâm ân cần chỉ bảo, động viên khích lệ, giúp đỡ tận tình và góp ý sâu sắc cho em trong suốt quá trình học tập cũng như thực hiện đề tài. Chặng đường vừa qua sẽ là những kỉ niệm đáng nhớ và đầy ý nghĩa đối với các anh chị em học viên lớp K12A7 nói chung và với bản thân em nói riêng. Dấu ấn ấy hiển nhiên không thể thiếu sự hỗ trợ, sẻ chia đầy yêu thương của tất cả người thân trong gia đình. Xin chân thành cảm ơn tất cả những người thân yêu đã giúp đỡ, đồng hành cùng em trên chặng đường vừa qua. Một lần nữa, em xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 8 năm 2020

Học viên

Trịnh Thị Thanh Bình

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1 Hàm số, biến phân và biến phân toàn phần

Trong chương này, tác giả sẽ trình bày một số khái niệm liên quan tới hàm số, chẳng hạn như hàm số liên tục tuyệt đối, hàm số L-Lipchitz và một số bất đẳng thức liên quan tới việc chứng minh bất đẳng thức Simpson sẽ trình bày trong chương tiếp theo.

Định nghĩa 1.1. (a) Hàm số $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ được gọi là liên tục tuyệt đối trên $[a, b]$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại số dương δ thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(y_i)| < \varepsilon,$$

với mọi họ hữu hạn các khoảng rời nhau $\{[x_i, y_i] : \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ của $[a, b]$ với

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| < \delta.$$

(b) Hàm số $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ được gọi là L-Lipschitz trên $[a, b]$ nếu tồn tại $L \geqslant 1$ thỏa mãn

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y| \text{ với mọi } x, y \in [a, b].$$

(c) Hàm số $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ được gọi là có biến phân bị chặn trên $[a, b]$ khi và chỉ khi tồn tại hằng số $M > 0$ thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant M,$$

với mọi phân hoạch $\mathbb{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ của $[a, b]$.

(d) Nếu hàm số $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ có biến phân bị chặn trên $[a, b]$, thì biến phân toàn phần của f trên $[a, b]$ được xác định như sau

$$\bigvee_{a}^{b}(f) = \sup_{\mathbb{P}=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\} \quad \text{phân hoạch của}[a,b]} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \right\}.$$

Nhận xét 1.1. *Một hàm liên tục tuyệt đối trên $[a, b]$ thì liên tục đều và có biến phân bị chặn trên $[a, b]$.*

Ví dụ 1.1. Nếu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm đơn điệu tăng thì với mọi phân hoạch $\mathbb{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ của $[a, b]$ ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{n} \{f(x_i) - f(x_{i-1})\} \\ &= f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a).\end{aligned}$$

Vì vậy, hàm f có biến phân bị chặn và $\bigvee_a^b (f) = f(b) - f(a)$.

Ví dụ 1.2. Nếu hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b) với $\sup_{a<x<b} |f'(x)| \geqslant M$, thì với mọi phân hoạch $\mathbb{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ của $[a, b]$ và theo định lý giá trị trung bình ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{n} |f'(t_i)[x_i - x_{i-1}]| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} M[x_i - x_{i-1}] = M(b - a).\end{aligned}$$

Do đó hàm f có biến phân bị chặn và $\bigvee_a^b (f) \leqslant M(b - a)$.

Định lý 1.1. *(a) Nếu $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ là các hàm có biến phân bị chặn và $c, d \in \mathbb{R}$, thì $cf + dg$ có biến phân bị chặn và có bất đẳng thức sau:*

$$\bigvee_a^b (cf + dg) \leqslant |c| \bigvee_a^b (f) + |d| \bigvee_a^b (g).$$

(b) Nếu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ có biến phân bị chặn trên $[a, b]$ và $[c, d] \subset [a, b]$, thì f có biến phân bị chặn trên $[c, d]$ và

$$\bigvee_c^d (f) \leqslant \bigvee_a^b (f).$$

(c) Nếu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ có biến phân bị chặn và $c \in (a, b)$, thì

$$\bigvee_a^b (f) = \bigvee_a^c (f) + \bigvee_c^b (f).$$

(d) Nếu hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ có biến phân bị chặn thì hàm $V(x) = \bigvee_a^x (f)$ và $V(x) - f(x)$ đơn điệu tăng trên $[a, b]$.

(e) Hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ có biến phân bị chặn khi và chỉ khi nó là hiệu của hai hàm tăng.

1.2 Một số bất đẳng thức liên quan

1.2.1 Bất đẳng thức Hölder

Từ bất đẳng thức AM–GM suy rộng ta có:

$$x^a y^b \leqslant \frac{a}{a+b} x^{a+b} + \frac{b}{a+b} y^{a+b} \tag{1.1}$$

với mọi $x, y \geqslant 0,\ a, b > 0$. Nếu đặt $u = x^a,\ v = y^b,\ p = (a+b)/a$ và $q = (a+b)/b$, rõ ràng $p > 1$ và ta có bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Longrightarrow uv \leqslant \frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q. \tag{1.2}$$

Bất đẳng thức này được gọi là bất đẳng thức Young. Kết quả dưới đây được gọi là bất đẳng thức Hölder.

Định lý 1.2 (Bất đẳng thức Hölder)**.** *Cho hai bộ số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là hai bộ n số thực dương và $p > 1$, thỏa mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó ta có bất đẳng thức sau:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.3}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_i^p = k b_i^q$ với mọi $i \in \{1, 2, , \ldots, n\}$.

Kết quả tiếp theo là bất đẳng thức Hölder ở dạng giải tích, chúng tôi chỉ trình bày kết quả mà không chứng minh.

Định lý 1.3 (Bất đẳng thức Hölder dạng giải tích)**.** *Giả sử $p, q > 1$ thỏa mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, f và g là hai hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$, khi đó*

$$\int_a^b |f(x) g(x)|\, dx \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.4}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tồn tại hai số thực A và B không đồng thời bằng không sao cho

$$A\, |f(x)|^p = B\, |g(x)|^q \quad \forall x \in [a, b].$$

1.2.2 Bất đẳng thức Grüss

Giả sử f, g và p là các hàm khả tích trên $[a, b]$. Ta có các ký hiệu sau:

$$P(x) = \int_a^x p(t) dt, \qquad \overline{P}(x) = P(b) - P(x),$$

$$A(f;p) = \frac{\left(\int\limits_a^b p(x)f(x)dx\right)}{\left(\int\limits_a^b p(x)dx\right)}, \qquad A(f) = A(f;1),$$

$$T(f,g;p) = A(fg;p) - A(f;p)A(g;p), \qquad T(f,g) = T(f,g;1),$$

$$R(f,g;p) = \frac{A(f;p)}{A(f;p)A(g;p)}, \qquad R(f,g) = R(f,g;1),$$

Giả sử f và g là hai hàm số xác định và khả tích trên $[a,b]$, thỏa mãn điều kiện:

$$\varphi \leqslant f(x) \leqslant \phi, \quad \gamma \leqslant g(x) \leqslant \Gamma \tag{1.5}$$

với mỗi $x \in [a,b]$, trong đó $\varphi, \phi, \gamma, \Gamma$ là các số thực cho trước.

Năm 1935 G. Grüss đã đưa ra khẳng định sau:

$$|T(f,g)| \leqslant \frac{1}{4}(\phi - \varphi)(\Gamma - \gamma), \tag{1.6}$$

trong bài báo công bố năm 1935 Grüss đã chứng minh bất đẳng thức này và cũng chỉ ra 1/4 là xấp xỉ tốt nhất. Hàm $T(f,g)$ được gọi là hàm Čebyšev.

Định lý 1.4. *Cho $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ là các hàm khả tích trên $[a,b]$ và thỏa mãn điều kiện:*

$$\phi \leqslant f(x) \leqslant \Phi, \quad \gamma \leqslant g(x) \leqslant \Gamma \text{ với mọi } x \in [a,b]. \tag{1.7}$$

Khi đó ta có bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} |T(f,g)| =& \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \cdot \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right| \\ &\leqslant \frac{1}{4}(\Phi - \phi)(\Gamma - \gamma) \end{aligned} \tag{1.8}$$

Hằng số $\frac{1}{4}$ là xấp xỉ tốt nhất.

Chứng minh. Từ đẳng thức

$$\begin{aligned} (b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \\ = \frac{1}{2}\int_a^b \int_a^b (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))dxdy \end{aligned} \tag{1.9}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Bunyakovsky-Schwartz, ta có:

$$\begin{aligned} &\left|\int_a^b \int_a^b (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))dxdy\right| \\ &\qquad \leq \left[\int_a^b \int_a^b (f(x) - f(y))^2 dxdy\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b \int_a^b (g(x) - g(y))^2 dxdy\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Từ đẳng thức (1.9) ta có:

$$\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b (f(x)-f(y))^2dxdy = (b-a)\int_a^b f^2(x)dx - \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2, \tag{1.11}$$

ta cũng có đẳng thức tương tự đối với hàm g. Từ đó ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx &- \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)^2\\ &= \left(\Phi - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \phi\right)\\ &\qquad -\frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x)-\phi)(\Phi - f(x))dx \end{aligned}\tag{1.12}$$

và tương tự ta có đẳng thức (1.12) đối với hàm g.

Theo giả thiết (1.7) ta có $(f(x)-\phi)(\Phi - f(x)) \geqslant 0$ với mọi $x \in [a,b]$, vì vậy

$$\int_a^b (f(x)-\phi)(\Phi - f(x))dx \geqslant 0$$

từ đẳng thức (1.12) suy ra

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx &- \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)^2 \\ &\leq \left(\Phi - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \phi\right)\\ &\leqslant \frac{1}{4}\left[\left(\Phi - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) + \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \phi\right)\right]^2\\ &= \frac{1}{4}(\Phi-\phi)^2\end{aligned}\tag{1.13}$$

Trong đánh giá trên, ta đã sử dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$\left(\frac{A+B}{2}\right)^2 \geqslant AB.$$

Tương tự ta có:

$$\int_a^b\int_a^b (g(x)-g(y))^2dxdy \leqslant \frac{1}{4}(\Gamma-\gamma)^2. \tag{1.14}$$

Sử dụng bất đẳng thức (1.10) kết hợp với bất đẳng thức (1.11) và các đánh giá trong (1.13) và (1.14), ta thu được

$$\left|\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))dxdy\right| \leqslant \frac{1}{4}(\Phi-\phi)(\Gamma-\gamma)(b-a)^2$$

và từ (1.9), ta suy ra (1.8).